基于可能性均值方差模型的社保基金投资组合研究

付云鹏[1]　马树才[2]　宋　琪[1]

（1.辽宁大学信息学院，辽宁 沈阳　110036；2.辽宁大学经济学院，辽宁 沈阳　110036）

［摘　要］　以 Carlsson 提出的可能性均值和可能性方差分别作为投资收益率为模糊数时投资收益和风险的度量，构建了基于可能性理论的均值—方差组合投资决策模型。结合我国社保基金的特点、投资运营管理的基本原则以及当前金融市场的主要投资工具的收益和风险状况，综合考虑国债指数、企债指数和沪深 300 指数每个交易日的开盘价、收盘价、最高价和最低价，将投资收益率用模糊数表示，研究我国社保基金的最优投资组合问题。结果表明该模型具有一定的实际应用价值。

［关键词］　社保基金；组合投资；可能性均值；可能性方差

［中图分类号］F830　　［文献标识码］A　　　［文章编号］2095－3410(2013)03－0111－04

一、引言及文献综述

社会保障基金是指依据国家法律、法规和政策的规定，为了从事养老、医疗、失业、工伤和生育事业等专门用途所筹集的资金，是从事社会保障活动的物质基础，也是社会保障制度赖以生存、发展、发挥功能的重要条件和保证。截止 2009 年末社保基金总额已达7766.22 亿元，实现收益额850.49 亿元，投资收益率 16.12％。社保基金投资运营的基本原则是在保证基金资产安全性、流动性的前提下，实现基金资产的增值。然而在经济一体化的今天，国际国内政治经济形势都会对基金的投资收益产生或多或少的影响。这使得投资环境处于不确定的环境之中，从而导致投资收益的不确定，这种不确定性既包括投资环境中随机因素对其收益不确定性的影响，也包括政策、经济环境、投资者的主观意愿等模糊因素的影响。为此，考虑模糊因素的影响，建立基于可能性理论的组合投资模型来探讨社保基金的优化投资问题具有理论和现实双重意义。Tanaka 和 Guo[1] 最先将证券的收益率视为可能性变量，提出让专家给出各证券的历史收益率样本与未来证券市场状态之间的相似程度，并据此确定证券收益率的可能性分布函数，提出基于可能性理论的中心差值模型. Carlsson[2] 提出了基于可能性分布的模糊数的可能性均值定义和两种可能性方差的定义，随后 Carlsson[3] 建立了基于模糊数的可能性均值—方差模型. 张卫国[4] 在 Carlsson 的基础上提出上可能性均值 — 方差模型和下可能性均值 — 方差模型，并给出模型应用的例子。陈炜等[5] 给出模糊数的上、下可能性均值和可能性方差的概念并构建了存在融资条件下的组合投资模型。付云鹏等[6]-[9] 研究了几种基于模糊理论的组合投资模型及其在证券投资市场的应用。本文将在前人研究成果的基础上，以模糊数的可能性均值作为收益率的预期，以文献[2]中的第二种可能性方差的定义作为对证券收益风险的度量，建立新的可能性均值 — 方差模型，研究可能性分布为三角模糊数的可能性均值与可能性方差，给出该可能性分布条件下的组合投资模型的具体形式和求解方法。最后将其应用于我国社保基金的最优投资组合问题中。

二、可能性均值和方差

［基金项目］本文是辽宁大学青年科研基金项目“基于模糊理论的组合投资模型及其应用研究”（项目编号：2011LDQN16）的阶段性成果。

［作者简介］付云鹏（1978－　），女，辽宁铁岭人，辽宁大学信息学院讲师，博士。主要研究方向：组合投资理论、计量经济学模型方法。

Carlsson 在文献[2]中给出模糊数的可能性均值和可能性方差的定义如下：

定义 1[2]　设 $\tilde{A}$ 为模糊数，$\tilde{A}$ 的 λ 截集为 $A_\lambda = [a(\lambda), b(\lambda)]$，则 $\tilde{A}$ 的可能性均值为

$$M(\tilde{A}) = \int_0^1 \lambda[a(\lambda) + b(\lambda)]d\lambda \tag{1}$$

定理 1　(1) 设 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 为两个模糊数，则

$$M(\tilde{A} + \tilde{B}) = M(\tilde{A}) + M(\tilde{B})$$

(2) 设 $\tilde{A}$ 为模糊数，k 为实数，则

$$M(k\tilde{A}) = kM(\tilde{A})$$

定义 2[2]　设 $\tilde{A}$ 为模糊数，$\tilde{A}$ 的 λ 截集为 $A_\lambda = [a(\lambda), b(\lambda)]$，模糊数 $\tilde{A}$ 的可能性方差为

$$Var(\tilde{A}) = \int_0^1 \lambda\{[a(\lambda) - M(\tilde{A})]^2 + [b(\lambda) - M(\tilde{A})^2]\}d\lambda \tag{2}$$

定义 3[2]　设 $\tilde{A}, \tilde{B}$ 为模糊数，$\tilde{A}$ 的 λ 截集为 $A_\lambda = [a(\lambda), b(\lambda)]$，$\tilde{B}$ 的 λ 截集为 $B_\lambda = [c(\lambda), d(\lambda)]$，则模糊数 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 的可能性协方差为

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_0^1 \lambda\{[a(\lambda) - M(\tilde{A})][c(\lambda) - M(\tilde{B})] + [b(\lambda) - M(\tilde{A})][d(\lambda) - M(\tilde{B})]\}d\lambda \tag{3}$$

定理 2　设 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 是两个模糊数，k, m, n 为实数，则

$$Var(\tilde{A} + \tilde{B}) = Var(\tilde{A}) + Var(\tilde{B}) + 2Cov(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$Var(k\tilde{A}) = k^2 Var(\tilde{A})$$

$$Var(m\tilde{A} + n\tilde{B}) = m^2 Var(\tilde{A}) + n^2 Var(\tilde{B}) + 2mnCov(\tilde{A}, \tilde{B})$$

若模糊数为三角模糊数 $\tilde{r} = <\alpha, r, \beta$，其中 r 为三角模糊数 $\tilde{r}$ 的中心，α, β 分别为 $\tilde{r}$ 的左右宽度，则 $\tilde{r}$ 的 λ 截集可以表示为

$$\tilde{r}_\lambda = [r - (1-\lambda)\alpha, r + (1-\lambda)\beta]$$

则由可能性均值的定义，可求得三角模糊数的可能性均值为

$$M(\tilde{r}) = \int_0^1 \lambda[r - (1-\lambda)\alpha + r + (1-\lambda)\beta]d\lambda$$

$$= \int_0^1 \lambda[2r + (1-\lambda)(\beta - \alpha)]d\lambda = r + \frac{\beta - \alpha}{6} \tag{4}$$

可能性方差为

$$\begin{aligned} Var(\tilde{r}) &= \int_0^1 \lambda\{[r - (1-\lambda)\alpha - M(\tilde{r})]^2 + [r + (1-\lambda)\beta - M(\tilde{r})]^2\}d\lambda \\ &= \int_0^1 \lambda\left\{\left[r - (1-\lambda)\alpha - \left(r + \frac{\beta-\alpha}{6}\right)\right]^2 + \left[r + (1-\lambda)\beta - \left(r + \frac{\beta-\alpha}{6}\right)\right]^2\right\}d\lambda \\ &= \int_0^1 \lambda\left\{(1-\lambda)^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{1}{3}(1-\lambda)(\beta-\alpha)^2 + \frac{1}{18}(\beta-\alpha)^2\right\}d\lambda = \frac{1}{18}(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \end{aligned} \tag{5}$$

三角模糊数 $\tilde{r}_1 = <\alpha_1, r_1, \beta_1>$ 和 $\tilde{r}_2 = <\alpha_2, r_2, \beta_2>$ 的可能性协方差为

$$Cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = \frac{1}{18}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + \frac{1}{36}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \tag{6}$$

三、模型的建立

假设市场上有 n 种风险资产和一种无风险资产可以进行投资组合，设第 i 种风险资产的预期收益率为 $\tilde{r}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，其中 $\tilde{r}_i$ 为模糊数，无风险资产的收益率为 r_{n+1}. 投资者投资于第 i 种资产的投资比例为 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$，$l_i, s_i (0 \leqslant s_i \leqslant l_i, \leqslant 1; i = 1, 2, \cdots, n+1)$，分别表示投资于第 i 种资产的上界和下界限制. 在此假定下，该资产组合的预期收益

$$\tilde{R} = x_1\tilde{r}_1 + x_2\tilde{r}_2 + \cdots + x_n\tilde{r}_n + x_{n-1}r_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{r}_i + x_{n-1}r_{n-1}$$

也是一个模糊数。

根据定理 1 和定理 2 知资产组合的预期收益 $\tilde{R}$ 的可能性均值为

$$M(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n} x_i M(\tilde{r}_i) + x_{n-1}r_{n-1}$$

资产组合的预期收益 $\tilde{R}$ 的可能性方差为

$$Var(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 Var(\tilde{r}_i) + \sum_{i>j=1}^{n} x_{x_j} Cov(\tilde{r}, \tilde{r}_j)$$

类似于 Markowitz 模型的思想，用模糊预期收益的可能性均值度量组合投资的收益，用模糊预期收益的可能性方差度量该组合投资的风险，在预先给定收益的下限为 $\mu (\mu > 0)$ 的条件下，选择投资组合使其总风险最小的投资组合决策模型可以表示为

$$\min\ Var(\tilde{R})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} M(\tilde{R}) \geqslant \mu \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \\ s_i \leqslant x_i \leqslant l_i, i = 1,2,\cdots,n+1 \end{cases} \tag{7}$$

四、模型的应用

按国务院批准的《全国社会保障基金投资管理暂行办法》，社保基金的投资范围限于银行存款、买卖国债和其他具有良好流动性的金融工具，包括上市流通的证券投资基金、股票、信用等级在投资级以上的企业债、金融债等有价证券。并规定银行存款和国债投资的比例不得低于50%，其中银行存款的比例不得低于10%，企业债、金融债投资的比例不得高于10%，证券投资基金、股票投资的比例不得高于40%。因此本文选取国债指数作为对国债投资收益的模拟，选取企债指数作为对企债和金融债收益的模拟，选取沪深300指数作为对基金和股市投资收益的模拟，选取银行存款作为无风险收益。取国债指数、企债指数和沪深300指数从2008年7月1日到2010年6月30日共482组数据作为样本，分别以K_{it}、G_{it}、D_{it}和S_{it}（$i=1,2,3$）表示国债指数、企债指数和沪深300指数第t个交易日的开盘价格指数、最高价格指数、最低价格指数和收盘价格指数。则第i个指数第t个交易日的收益率可用三角模糊数$\tilde{r}_{it} = <\alpha_{it}, r_{it}, \beta_{it}>$（$i=1,2,3, t=1,2,\cdots,482$）表示，其中$\alpha_{it} = r_{it} - n_{it}$，$\beta_{it} = n_{it} - r_{it}$，$m_{it} = \frac{G_{it} - K_{it-1}}{K_{it-1}} \times 100\%$，$r_{it} = \frac{s_{it} - K_{it-1}}{K_{it-1}} \times 100\%$，$n_{it} = \frac{D_{it} - K_{it-1}}{K_{it-1}} \times 100\%$，

则显然有$n_{it} \leqslant r_{it} \leqslant m_{it}$。这样得到的每个交易日的收益率都反映了该天收益的波动情况，于是第i个指数的预期收益率可用三角模糊数

$$\tilde{r}_i = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} \tilde{r}_{it} \tag{8}$$

表示，其中T为交易天数. 按照上述方法求得国债指数、企债指数和沪深300指数的模糊预期收益率数据和每种指数的可能性均值数据见表1：

由公式（5）和（6）求得国债指数、企债指数和沪深300指数之间的可能性协方差见表2：

视银行存款为无风险收益，取2003年到2009年一年期定期存款利率按照利率执行天数加权平均后得2.45%，将其作为无风险资产的收益率，并将其转化为日均收益率后取$r_4 = 0.0066\%$。将表1和表2中数据带入到模型(7)，并注意到《暂行办法》的有关规定，可得如下模型：

表1　　三种指数的预期收益率表

名称	模糊预期收益率	可能性均值
国债指数	$<0.0714, 0.0210, 0.054>$	0.0181
企债指数	$<0.1280, 0.0607, 0.0587>$	0.0492
沪深300指数	$<1.4406, 0.1339, 1.2839>$	0.1078

资料来源：原始数据来源于和讯网(www.hexun.com)，表1中的预期收益率数据根据公式(8)求得。

表2　　三种指数的可能性协方差表

	r_1	r_2	r_3
r_1	0.001319	0.001985	0.028547
r_2	0.001985	0.003038	0.042690
r_3	0.028547	0.042690	0.619257

$$\min x^T V x$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 0.0181x_1 + 0.0492x_2 + 0.1078x_3 + 0.0066x_4 \geqslant \mu \\ x_1 + x_2 + x_3 x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 \geqslant 0.5 \\ x_4 \geqslant 0.1 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 0.1 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 0.4 \end{cases} \tag{9}$$

其中$x = (x_1, x_2, x_3)^T$，$V = \begin{pmatrix} 0.001319 & 0.001985 & 0.028547 \\ 0.001985 & 0.003038 & 0.042690 \\ 0.028547 & 0.042690 & 0.619257 \end{pmatrix}$，μ为事先给定的收益率的下限限制。

模型(9)是一个带有线性约束的二次规划模型，并且V为对称矩阵，可以用MATLAB软件求解。对于不同的收益率下限限制，可得到不同的投资比例和风险见表3：

从表3中可以看出随着预期收益率下限的增加风险值也随之增加，当预期收益率的下限值小于0.02时，这时风险较小，相应的投资大部分投资于国债和银行存款；随着预期收益值的增大，国债的投资比例减小，而股票的投资比例增加，这势必会带来风险的增大，这与实际相符，说明股市在高收益的同

表 3 不同收益率下限的投资比例和风险表

μ 值	投资比例	风险
0.0066	x1 = 0;x2 = 0;x3 = 0;x4 = 1	1.5621e - 054
0.01	x1 = 0;x2 = 0. 0798;x3 = 0;x4 = 0.9202	9.6765e - 006
0.015	x1 = 0.3600;x2 = 0.1000;x3 = 0.0000;x4 = 0.5400	1.7209e - 004
0.02	x1 = 0.7948;x2 = 0.1000;x3 = 0.0000;x4 = 0.1052	5.8946e - 004
0.02556	x1 = 0.7387;x2 = 0.1000;x3 = 0.0613;x4 = 0.1000	0.0032
0.03	x1 = 0.6892; x2 = 0.1000; x3 = 0.1108;x4 = 0.1000	0.0069
0.035	x1 = 0.6334;x2 = 0.1000;x3 = 0.1666;x4 = 0.1000	0.0127
0.04	x1 = 0.5777; x2 = 0.1000;x3 = 0.2223; x4 = 0.1000	0.0203
0.04106	x1 = 0.5659;x2 = 0.1000;x3 = 0.2341;x4 = 0.1000	0.0221
0.045	x1 = 0.5220;x2 = 0.1000;x3 = 0.2780;x4 = 0.1000	0.0296
0.05	x1 = 0.4662; x2 = 0.1000; x3 = 0.3338;x4 = 0.1000	0.0406
0.055	x1 = 0.4105; x2 = 0.1000;x3 = 0.3895;x4 = 0.1000	0.0534

时也将伴随着高风险。从 2000 年到 2009 年我国社保基金的年平均收益率为 9.75%，将其转换为日均收益率为 0.02556%，从表 3 中可以看出，如果想把社保基金的投资收益控制在目前的年均收益率水平之上，则须将基金总额的 73.87% 投资于国债，10% 投资于企债，6.13% 投资于股市，10% 存入银行。2009 年我国社保基金实际的直接投资比例为 53.37%，委托投资比例为 46.63%，实现收益率 16.12%。若将此收益率水平转换为日均收益率为 0.04106%，从表 3 中可以看出此时的投资比例为国债56.59%，企债 10%，股市 23.41%，存款 10%。也就是说用于直接投资的部分为 66.59%，用于委托投资的部分占总资产的 33.41%，这与实际投资有所偏差，这是由于本模型只是考虑将社保基金用于国债、企债、股市和银行这四种投资渠道，因此难免于实际有所偏差，但是总体来讲本模型的结论与实际基本相符。

五、结论

本文基于模糊数的可能性均值、可能性方差构建了组合投资决策模型，给出了模型的求解方法。并将该模型应用于我国社保基金的投资决策问题中用以检验模型的应用效果，实证结果表明该模型具有一定的实际应用价值，用该模型求得的结果与我国社保基金的实际投资取向基本一致。

参考文献：

[1] H. Tanaka, P. Guo, I. B. Turksen, Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems, 2000,111.

[2] Christer Carlsson C, Fuller R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001,122(1).

[3] Christer Carlsson, Robert Fuller, Peter Majlender. A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score[J]. Fuzzy Sets and Systems,2002,131(1).

[4]张卫国. 现代投资组合理论——模型、方法与应用[M]. 北京:科学出版社,2007.

[5]陈炜,张润彤,杨玲. 存在融资条件下证券组合选择的一种模糊决策方法[J]. 北京交通大学学报,2007,(01).

[6]付云鹏,马树才. 一种新的基于可能性均值的证券组合投资决策模型[J]. 统计与决策,2011,(03).

[7]付云鹏,马树才,宋琪. 基于模糊空间距离的组合投资模型及其应用研究[J]. 数量经济技术经济研究,2012,(08).

[8]付云鹏,马树才. 基于截集的加权可能性均值-方差模型[J]. 技术经济与管理研究,2012,(08).

[9]付云鹏,马树才,滕书娟. 基于新的可能性方差的组合投资模型及其应用研究[J]. 经济与管理评论,2012,(09).

[10]薛定宇,陈阳泉. 控制数学问题的 MATLAB 求解[M]. 北京:清华大学出版社,2007.

[11]全国社会保障基金理事会网站(www.ssf.gov.cn).

(责任编辑:刘 军)